

Rechenunterricht mit dem Kutzer-Zug



1. Grundprinzipien

- Hinführung zum eigentlichen Rechnen statt bloßem „Abzählen“
- Visualisierung der Mengen in festgelegter Anordnung
- eindeutige Unterscheidung von Einern und Zehnern
- nach Festigung des Zahlenraums bis 10 (Mengen werden spontan ohne Abzählen erfasst) Einführung des Zahlenraums bis 100 (statt nur bis 20) zur Verdeutlichung des sich wiederholenden Zehner-Einer-Systems

2. Einführung in den Zahlenraum bis 10

- Erarbeitung zunächst nur bis maximal 5, bei Sicherheit langsame Weiterführung bis 10
- Schwerpunkt: gezieltes Training zur Spontanerfassung der Mengen (auch als Form im Umriss sowie mit anderen Materialien in dieser Anordnung)
- Einführung der nächsten Menge/Zahl erst, nachdem die bekannten ohne abzuzählen spontan erfasst/gelegt werden können
- Übungen zum Verändern von Mengen (zunächst mit geraden Mengen):
Lege 2 Kisten in den Waggon, mache 4 daraus, mache 6 daraus, jetzt sollen es wieder nur 4 sein, nimm noch 2 weg, wie viele hast du noch?...
- Tipp: zunächst die geraden Zahlen trainieren (sind leichter zu speichern), dann die ungeraden (schwierig: die Unterscheidung zwischen 5 und 7)
- Hinführung zu Rechenoperationen erst nachdem gesichert ist, dass alle Mengen von 1 – 10 ohne abzuzählen benannt/gelegt werden können
- abschließend Einführung der Null

- Elterninformation bezüglich der Anwendung auch im privaten Bereich (z.B. Tischdecken nicht in 1:1-Zuordnung, sondern als Menge wie im Kutzer-Zug)

Übungen zur Spontanerfassung der Mengen:

- eine Zahl wird genannt und die entsprechende Menge in den Waggon gelegt
- eine Person legt eine Menge in den Waggon, andere nennen die Anzahl
- Ausmalen der entsprechenden Felder auf Arbeitsblättern
- Abbildung auf Waggon-Karte anschauen, ohne Abzählen die Menge nennen, auf der Rückseite kontrollieren bzw. umgekehrt entsprechend der Ziffer Waggon beladen, Karte umdrehen und anhand der Abbildung das Ergebnis kontrollieren (eigenständiges Üben mit Selbstkontrolle)
- Klammerkarten mit Abbildungen von beladenen Waggon: Klammer an der passende Ziffer anbringen
- Waggon-Karten und Zahlen zuordnen, Kontrolle z.B. durch farbige Punkte (Rückseite)

3. Handelnde Einführung in Rechenoperationen

Spielsituation: Der beladene Zug fährt zu einem anderen Bahnhof, an dem Kisten aus- oder eingeladen werden

Wichtig: Alle Kisten werden zunächst hinter den Waggon gelegt, da sonst die Gefahr besteht, dass die Schüler/innen den Überblick verlieren.

Addition:

- die erste Menge wird in den Waggon gelegt
- die zweite davor (auf dem Bahnsteig), auch hier in der festgelegten Anordnung wie im Waggon
- Kontrolle der Mengen
- Zuladen der zweiten Menge und spontanes Feststellen des Ergebnisses

Subtraktion:

- die geforderte Menge wird in den Waggon gelegt

- die abzuziehende Menge wird, nachdem sie im Waggon in der bekannten Anordnung etwas abgerückt wurde, aus dem Zug genommen und davor in derselben Anordnung aufgestellt (auf den Bahnsteig abgeladen)
- Kontrolle der Mengen (Problem: die zunächst geforderte Menge ist nicht mehr erkennbar, muss ggfls. durch Zurücklegen überprüft werden)
- Feststellung des Ergebnisses (ohne abzuzählen)

4. Hinführung zum Kopfrechnen

Voraussetzung für das Kopfrechnen ist die Fähigkeit, sich die Anordnung der Mengen im Zug bildlich vorstellen zu können. Zunächst wird hier noch mit dem Holz-Rechenzug gearbeitet, dann zunehmend das zweidimensionale Material (Karton) eingesetzt (höhere Abstraktionsebene).

Bei der Hinführung zum Kopfrechnen wird wie folgt schrittweise die konkrete Ebene verlassen und durch die Vorstellung ersetzt (zunächst nur Addition):

- eine Menge wird in den Zug gelegt, die andere verbleibt in der Hand einer anderen Person, wird angeschaut, dann so in den Zug gelegt, dass das Endergebnis nicht erkennbar ist (von der Hand verdeckt wird): auf das Ergebnis muss durch visuelle Vorstellung geschlossen werden
- eine Menge wird in den Zug gelegt, die andere nur kurz gezeigt ohne sie in den Waggon zu legen, dann in der Vorstellung das Endergebnis vermutet
- ohne Zug: die Karte mit der geforderten Menge wird herausgesucht, kleine Mengen durch die Vorstellung ergänzt (bei größeren Mengen bzw. Unsicherheiten wird mit dem Finger auf die Felder gezeigt, die durch die zweite Menge belegt werden würden)
- Karten mit dem Mengenbild anschauen, Augen schließen und im „Kopf-Kino sehen“, die zweite Menge in der Vorstellung ergänzen
- Aufgaben ohne Hilfsmittel lösen; bei Unsicherheiten oder schwierigen Aufgaben zu vorhergehenden Arbeitsformen (mit konkreteren Visualisierungen) zurückgehen
- gezieltes Training zum Kopfrechnen: systematischer Aufbau von einfachen zu schwierigen Aufgaben, die ohne Hilfsmittel gelöst werden können; Training mit anderen Arbeitsmitteln wie z.B. Rechenkarten mit Selbstkontrolle; sorgfältige Lernstandsanalyse (welche Aufgaben

beherrscht er/sie schon, welche müssen noch gezielt geübt werden) und systematische Erweiterung der beherrschten Aufgaben

- Subtraktion: die Menge im Waggon wird angeschaut, die abzuziehende Menge wird etwas abgerückt und das Endergebnis wird sichtbar
- es wird auf die Menge getippt, die weggenommen werden soll, auf das Ergebnis geschlossen und dieses durch entsprechendes Handeln überprüft
- eine andere Person entfernt die wegzunehmende Menge und verdeckt den verbleibenden Rest; Überprüfung durch Aufdecken der Hand
- im Weiteren analoges Vorgehen wie bei der Addition

5. Einführung in den Zahlenraum bis 100

Erst nachdem alle Aufgaben aus dem Zahlenraum bis 10 weitestgehend im Kopf gelöst werden können, sollte der Zahlenraum bis 100 eingeführt werden:

- Einführung in die Zehner-Bündelung: Der Zug mit allen 10 Waggon wird mit den grünen Kisten beladen. Aufgrund der Erfahrung, dass dies eine mühsame und zeitraubende Arbeit ist, wird der „Trick“ eingeführt die 10 grünen Kisten mit rotem Papier zu verpacken und zu einem Zehner-Pack zusammenzufassen. Wichtig: die 10 grünen Kisten sind auf der Unterseite noch sichtbar.
- Einführung in die Zehnerzahlen: Die Zehnerpacks werden gezählt und durch die erste rote Ziffer repräsentiert. Wenn keine zusätzlichen grünen Kisten im Zug sind, wird dies durch die grüne 0 als zweite Ziffer dargestellt.
- Die korrekte sprachliche Umsetzung insbesondere durch die Schüler/innen selbst ist sehr wichtig, muss intensiv trainiert und immer wieder durch die rot-grünen Zifferkarten und den Zug veranschaulicht werden: 2 Zehner sind 20, 3 Zehner sind 30 bzw. wie viele Zehner hat 40, wie viele Zehner sind es bei 60 ?
- Einführung gemischter Zahlen mit Zehnern und Einern: Nachdem das Verständnis für Zehner gesichert ist, wird der Begriff „Einer“ für die grünen Kisten im Gegensatz dazu eingeführt: beim Zehner sind 10 Kisten zusammen, eine grüne Kiste ist nur ein Einer. Erfahrungsgemäß kommt es hier wieder zu Verunsicherungen, die allerdings durch

intensives und konsequentes Üben im Laufe der Zeit überwunden werden können.

Beim Beladen des Zuges werden zunächst die Zehner in die Waggon gelegt und die entsprechende Zehnerzahl dazu gelegt. Dann werden die Einer ergänzt und die entsprechende grüne Ziffer auf die Null der Zehnerzahl gelegt:

Beispiel: *Lege zwei rote Zehner in den Zug. Siehst du grüne Einer? Nein? Also schreiben wir eine grüne 0. Suche die passende Zahl und legen sie dazu!*

 **20**

Jetzt lege noch drei grüne Kiste in den nächsten Wagg 

Jetzt haben wir drei grüne Einer und legen die grüne 3 auf die Null: **23**

- **Nächste Schritte:** Übungen zum Zuordnen von Zahlen und abgebildeten Zügen bzw. zum entsprechenden Ausmalen der Züge zu vorgegebenen Zahlen. Im weiteren Verlauf schließen sich Aufgaben zur Zahlenreihenfolge, zur Hunderter-Zahlentafel, zu fehlenden Zahlen, zu Vorgänger- und Nachbarzahlen sowie zum auswendigen Aufsagen der Zahlenreihe an.
- **Schreiben der Ziffern:** Schüler/innen mit Problemen bei der Rechts-Links-Orientierung, die dazu neigen die Ziffern zweistelliger Zahlen zu verdrehen, lernen mit dem Kutzer-Zug eher richtig zu schreiben. Grundsätzlich sollten beim Schreiben die Ziffern so lange wie nötig in rot (für die Zehner) und in grün (für die Einer) geschrieben werden. Die Schüler/innen sollten dazu angehalten werden die Ziffern so zu schreiben, wie sie gesprochen werden: von rechts nach links (als bei 23 erst die drei und dann davor die 2).

Wichtig: Die gesicherte Unterscheidung zwischen Zehnern und Einern, die meist eine sehr lange, intensive und sorgfältig geplante Übungszeit und viele Wiederholungen benötigt, ist die entscheidende Grundlage um später im Zahlenraum bis 100 mit Rechenoperationen sinnvoll und verstehend umgehen zu können. Bei entsprechender Beharrlichkeit ist es erstaunlich zu sehen, wie weit Schüler/innen mit ganzheitlichem Förderbedarf kommen

können, wenn sie die Zehner-Bündelung unseres Zahlensystems verstanden haben.

6. Rechnen im Zahlenraum bis 100 ohne Zehnerübergang

Auch hier werden Rechenoperationen unter Berücksichtigung der roten Zehner und grünen Einer eingeführt. Bei vorhandenen Arbeitsblättern können die Zehner und Einer mit Buntstiften eingefärbt werden (z.B. reihenweise wie in Spalten).

Zehner und Einer werden getrennt berechnet, Zehner dabei zunächst wie Einer im Kopf addiert. Hilfreich sind zunächst Reihenaufgaben (z.B. $14 + 10$, $24 + 10$, $34 + 10$)

Beispiel: $26 + 30$

Was ändert sich? Die Zehner! Wie viele Zehner sind schon da? 2. Wie viele Zehner kommen dazu? 3. Wie viele Zehner sind es zusammen? 5. Wie heißt dann die Zahl? 50. Da waren aber auch noch 6 Einer. Wie viel ist also $26 + 30$? 56.

Sinnvoller Aufbau der Rechenoperationen:

- $Z + Z$ und $Z - Z$
- $Z + E$ und analog $ZE - E$ Beispiel: $40 + 6 \rightarrow 46 - 6$
- $ZE + Z$ und $ZE - Z$ Hinweis: Hier ändern sich nur die Zehner!
- $ZE + E$ und $ZE - E$ Hinweis: Hier ändern sich nur die Einer!
- gemischte Aufgaben Hinweis: Ändern sich die Zehner oder die Einer?
- evtl. Ergänzungs- und Verminderungsaufgaben

7. Einführung in den Zehnerübergang (ZÜ)

Erst nach der Beherrschung der vorgehenden Aufgaben, d.h. dem gesicherten Mengenbild und Verständnis für die Zehnerbündelung, sollte der Zehnerübergang eingeführt werden. Hierfür müssen die Schüler/innen über die Teil-Kompetenzen „Ergänzen bis zum nächsten Zehner“ und „Aufteilen von Mengen“ verfügen. Wenn die Voraussetzungen für den Zehnerübergang

sorgfältig eingeübt wurden, ist die eigentliche Operation nicht mehr schwierig.

- Mengen auswendig bis zum Zehner ergänzen: Die fehlende Menge kann mit Blick auf die festgelegte Anordnung im Waggon visuell als „Negativ-Bild“ erschlossen werden (evtl. dafür den Waggon/die Karte um 180 Grad drehen)
- Mengen aufteilen: Durch leichtes Abrücken der ersten Teilmenge im Waggon wird die zweite Teilmenge leicht erschlossen.
- praktische Einführung in den Zehnerübergang: Vorgehensweise analog wie bei Addition/Subtraktion, wobei zunächst der bereits zum Teil beladene Waggon aufgefüllt (zum Zehner ergänzt) und dann die Restmenge in den nächsten Waggon geladen wird.
- Änderung bei den Zehnern bei Addition: Um zu verdeutlichen, dass bei der Addition mit ZÜ ein weiterer Zehner hinzukommt und die entsprechende Zahl auf einen Blick richtig benannt werden kann, werden die 10 grünen Einer in dem nunmehr gefüllten Waggon gegen ein rotes Zehner-Pack getauscht.
- Änderung bei den Zehnern bei Subtraktion: Hier wird deutlich, dass ein rotes Zehner-Pack gegen 10 grüne Einer-Kisten eingetauscht werden muss, um die Rechenoperation durchführen zu können.
- Wenn die Schüler/innen diese Aufgaben verstanden haben und schließlich im Kopf lösen können, ist es nur noch ein „relativ“ kleiner Schritt bis zum Lösen von gemischten Aufgaben wie z.B. $25 + 17$. Hierbei sind dann möglicherweise nur noch kleine Hilfestellungen notwendig, z.B. durch das farbige Unterstreichen von Leerstellen in rot oder grün, damit deutlich wird, welche Zahlen zuerst gerechnet werden sollen, die Zehner oder die Einer.

Beispiel:

$$38 + 24 = \underline{\quad}$$

$$47 + 35 = \underline{\quad}$$

$$38 + 4 = 42$$

$$47 + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$42 + 20 = 62$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$